

УДК 531.396, 534.014.4, 534.015.1

Периг А. В., Стадник А. Н., Дериглазов А. И., Подлесный С. В.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С РАВНОМЕРНО  
ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Современное развитие вычислительных технологий позволяет решать многие нелинейные задачи для движения сферического маятника [1–14]. При этом используются такие расчетные методы, как дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ) [2], метод конечных элементов (МКЭ) [4–5], методы Рунге-Кутты [6, 10–14]. Прикладные инженерные задачи в области подъемно-транспортных машин (ПТМ) главным образом связаны с прямолинейным или вращательным движением точки подвеса сферического маятника в детерминированном и стохастическом случаях [1–14]. Получаемые приближенные численные результаты не в полной мере позволяют проанализировать амплитудно-частотные характеристики механических систем «стрела крана – груз» ввиду сложности получения либо полного отсутствия аналитических решений.

Все вышеизложенное обуславливает актуальность и целесообразность настоящей работы, связанной с построением приближенной линеаризованной модели для задачи о малых колебаниях сферического маятника с подвижной точкой подвеса. Получаемые при этом аналитические зависимости не являются более грубыми, чем приближенные решения нелинейных задач и в то же время обеспечивают дополнительные возможности анализа полученных результатов.

Целью работы является определение закона движения груза с подвижной точкой закрепления при равномерном вращении стрелы крана.

Для построения модели решаемой задачи использовался принцип Даламбера для движения несвободной материальной точки. На рис. 1 введены  $E(\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3)$  – инерциальная  $(x_2 y_2 z_2)$  система отсчета (ИСО); а также  $B(\tilde{e}_1; \tilde{e}_2; \tilde{e}_3)$  и  $F(e_1; e_2; e_3)$  – неинерциальные  $(x_1 y_1 z_1)$  и  $(x y z)$  системы отсчета (НИСО).

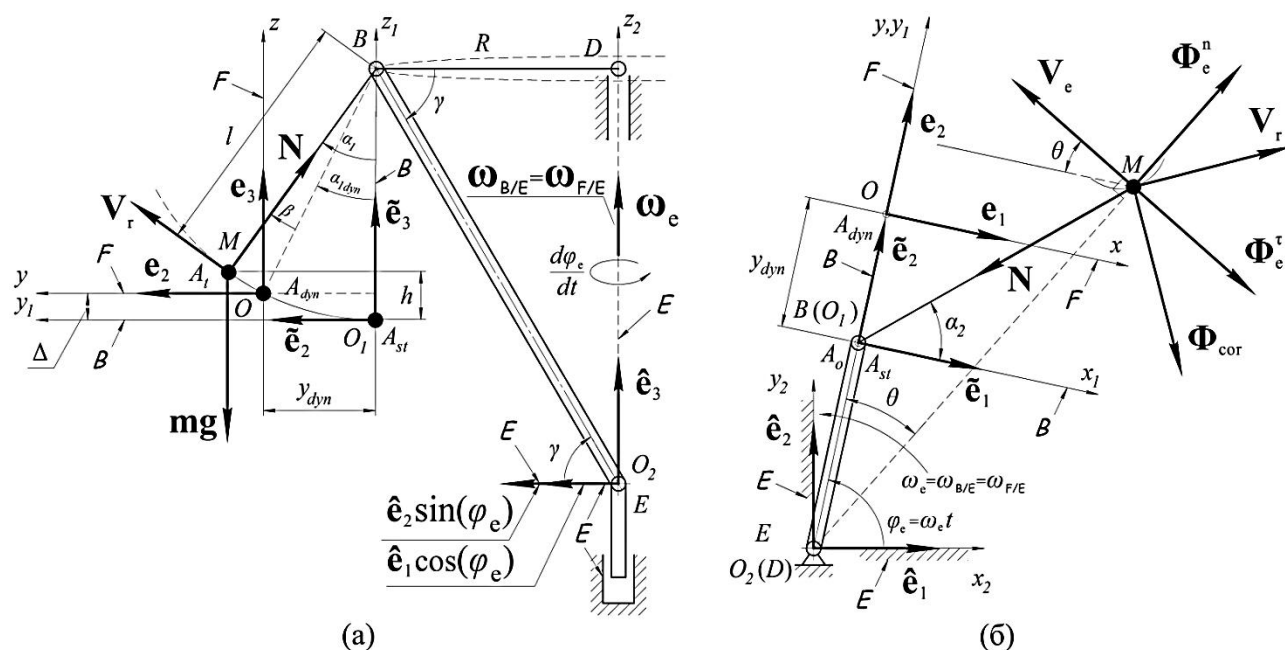


Рис. 1. Схема раскачивания груза  $M$  на тросе  $MB$ , прикрепленном к т.  $B$  стрелы крана  $BO_2$ , в вертикальной плоскости  $(yz)$  (а) и в горизонтальной плоскости  $(x_1 y_1)$  (б)

В ИСО  $\mathcal{E}$  груз  $M$  совершает сложное движение с относительной скоростью  $\mathbf{V}_{M/B} = \mathbf{V}_{M/F} = \mathbf{V}_r = (dx_1/dt) \tilde{\mathbf{e}}_1 + (dy_1/dt) \tilde{\mathbf{e}}_2 + (dz_1/dt) \tilde{\mathbf{e}}_3$  (рис. 2) и переносной скоростью  $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_{O_2/E} + \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{O_2/M} = -(d\varphi_e/dt)(R + y_1) \tilde{\mathbf{e}}_1 + ((d\varphi_e/dt)x_1) \tilde{\mathbf{e}}_2$ .

НИСО  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{F}$  отстоят друг от друга вдоль оси  $y_1$  на величину  $y_{dyn} = l \sin(\alpha_{1dyn})$ , а вдоль оси  $z_1$  на величину  $\Delta = l(1 - \cos(\alpha_{1dyn}))$ , где  $\alpha_{1dyn}$  – угол между вертикальной осью  $A_{st}z_1$  и тросом  $l = BA_{dyn}$  в положении т.  $A_{dyn}$  динамического равновесия груза. Стрела крана  $BE$  образует с горизонтальной плоскостью  $(x_2y_2)$  угол  $\gamma$ , а т.  $M$  описывает вокруг вертикальной оси  $O_2z_2$  дугу окружности радиуса  $BD = R$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_{B/E} = \omega_{F/E} = \omega_e = d\varphi_e/dt$ , где  $\varphi_e = \angle(\hat{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2)$ . На груз действуют:  $\mathbf{mg}$  – активная сила тяжести,  $\mathbf{N}$  – реакция натяжения троса, а также  $\Phi_e^r = (-m)\mathbf{a}_e^r = (-m)(\boldsymbol{\alpha}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M})$ ,  $\Phi_e^n = (-m)\mathbf{a}_e^n = (-m)(\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times (\boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{r}_{E/M}))$ ,  $\Phi_{cor} = (-m)\mathbf{a}_{cor} = (-m)(2 \boldsymbol{\omega}_{B/E} \times \mathbf{V}_{M/B})$  – Даламберовы силы инерции, где  $\boldsymbol{\alpha}_{B/E} = \boldsymbol{\varepsilon}_{B/E}$  – вектор углового ускорения стрелы, причем  $\boldsymbol{\alpha}_{B/E} = \boldsymbol{\alpha}_{F/E} = \boldsymbol{\varepsilon}_e = d^2\varphi_e/dt^2$ .

Несвободное движение груза  $M$  подчиняется уравнению геометрической связи:

$$l^2 = x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - l)^2 = (l \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2))^2 + (l \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2))^2 + (l \cos(\alpha_1))^2, \quad (1)$$

где  $\alpha_1 = \angle(\tilde{\mathbf{e}}_3, \mathbf{r}_{B/M})$  – угол отклонения троса от вертикали, а угол  $\alpha_2$  – угол между плоскостями  $(x_1z_1)$  и  $(BMO_1)$  – сферические координаты груза  $M$ .

С применением принципа Даламбера к исследованию движения механической системы «стрела крана – груз» была получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), составленная в сферических координатах:

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right)^2 \sin(2\alpha_1) - \frac{1}{2} \omega_e^2 \sin(2\alpha_1) - \left( \frac{R}{l} \right) \omega_e^2 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) = - \left( \frac{g}{l} \right) \sin(\alpha_1); \\ \left( \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} \right) \sin(\alpha_1) + 2 \left( \frac{d\alpha_1}{dt} \right) \left( \omega_e + \left( \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \right) \cos(\alpha_1) - \left( \frac{R}{l} \right) \omega_e^2 \cos(\alpha_2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Было показано, что для случая равномерного вращения стрелы крана и в предположении малости угла  $\alpha_1$  величина натяжения троса мало отличается от значения силы тяжести, т. е.  $\mathbf{N} \approx \mathbf{mg}$ . В рамках вышеизложенных допущений в НИСО  $\mathcal{F}$  справедлива линейризованная однородная система ОДУ в декартовых координатах  $(xy)$ :

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2x}{dt^2} - \left( \omega_e^2 - \left( \frac{g}{l} \right) \right) x - 2\omega_e \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) = 0; \\ \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \left( \omega_e^2 - \left( \frac{g}{l} \right) \right) y + 2\omega_e \left( \frac{dx}{dt} \right) \right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

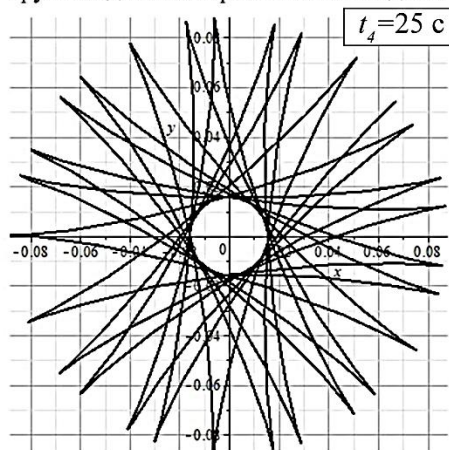
При нулевой начальной скорости груза относительно земли определены начальные условия для систем ОДУ (2)–(3) и получено аналитическое решение системы (3) ОДУ:

$$\begin{cases} x(t) = \left( \frac{V_B - y_{dyn}(k - \omega_e)}{2k} \right) \sin(v_1 t) + \left( \frac{V_B + y_{dyn}(k + \omega_e)}{2k} \right) \sin(v_2 t); \\ y(t) = \left( \frac{V_B - y_{dyn}(k - \omega_e)}{2k} \right) \cos(v_1 t) - \left( \frac{V_B + y_{dyn}(k + \omega_e)}{2k} \right) \cos(v_2 t), \end{cases} \quad (4)$$

где  $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ;  $\omega_e \neq k$ ;  $V_B = \omega_e R$ ;  $v_1 = k + \omega_e$ ;  $v_2 = k - \omega_e$ .

Система (4) определяет вид относительной траектории груза на рис. 2, (а, в) для следующих численных значений параметров механической системы:  $R = 0,492$  м;  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $l = 0,825$  м;  $k = (g/l)^{0,5} \approx 3,448$  рад/с;  $T = 30$  с;  $\omega_e = 2\pi/T \approx 0,209$  рад/с;  $\varphi_e = 180^\circ$ ,  $\alpha_{1dyn} = 0,00221$  рад;  $V_B = 0,103$  м/с;  $y_{dyn} = 0,00182$  м;  $v_1 = k + \omega_e = 3,6578$  рад/с;  $v_2 = k - \omega_e = 3,2388$  рад/с.

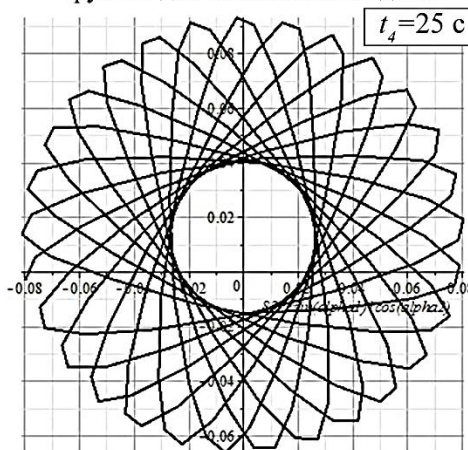
Относительная траектория раскачивания груза М для линеаризованной модели



—  $y(x): l=0,825$  м;  $k \approx 3,448$  рад/с;  $\omega_e = 0,6$  рад/с

(а)

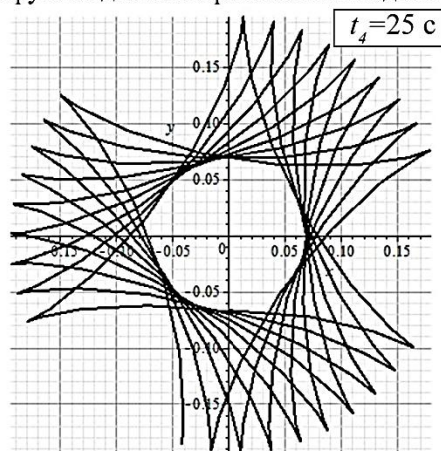
Относительная траектория раскачивания груза М для нелинейной модели



—  $y(x): l=0,825$  м;  $k \approx 3,448$  рад/с;  $\omega_e = 0,6$  рад/с

(б)

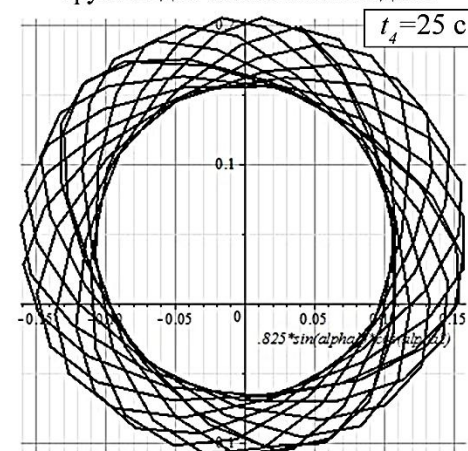
Относительная траектория раскачивания груза М для линеаризованной модели



—  $y(x): l=0,825$  м;  $k \approx 3,448$  рад/с;  $\omega_e = 1,2$  рад/с

(в)

Относительная траектория раскачивания груза М для нелинейной модели



—  $y(x): l=0,825$  м;  $k \approx 3,448$  рад/с;  $\omega_e = 1,2$  рад/с

(г)

Рис. 2. Сравнение расчетных относительных траекторий груза М в НИСО  $F$ . а, в – линеаризованная (3)–(4); б, г – нелинейная (2) модели

Система (4) и расчетные относительные траектории раскачивания груза М на рис. 2, (а, в) показывают, что НИСО  $B$  и  $F$  совершают вращение, противоположное к направлению вращения стрелы крана  $BO_2$ . На основе (4) и рис. 2 абсолютные координаты  $x_2, y_2, z_2$  груза М в ИСО  $E$ , зависящие от относительных координат груза  $x, y, z$  в НИСО  $B$ , определялись как:

$$\begin{cases} x_2 = (R + y_{dyn} + y) \cos(\varphi_e) + x \sin(\varphi_e); \\ y_2 = (R + y_{dyn} + y) \sin(\varphi_e) - x \cos(\varphi_e); \\ z_2 = z. \end{cases} \quad (5)$$

Полученные из (4)–(5) теоретические абсолютные траектории груза в ИСО  $E$  приведены на рис. 4 в виде (— — — — —,  $y_2 = y_2(x_2)$ ). Экспериментальные исследования основывались на применении эмпирической установки, показанной на рис. 3, а.

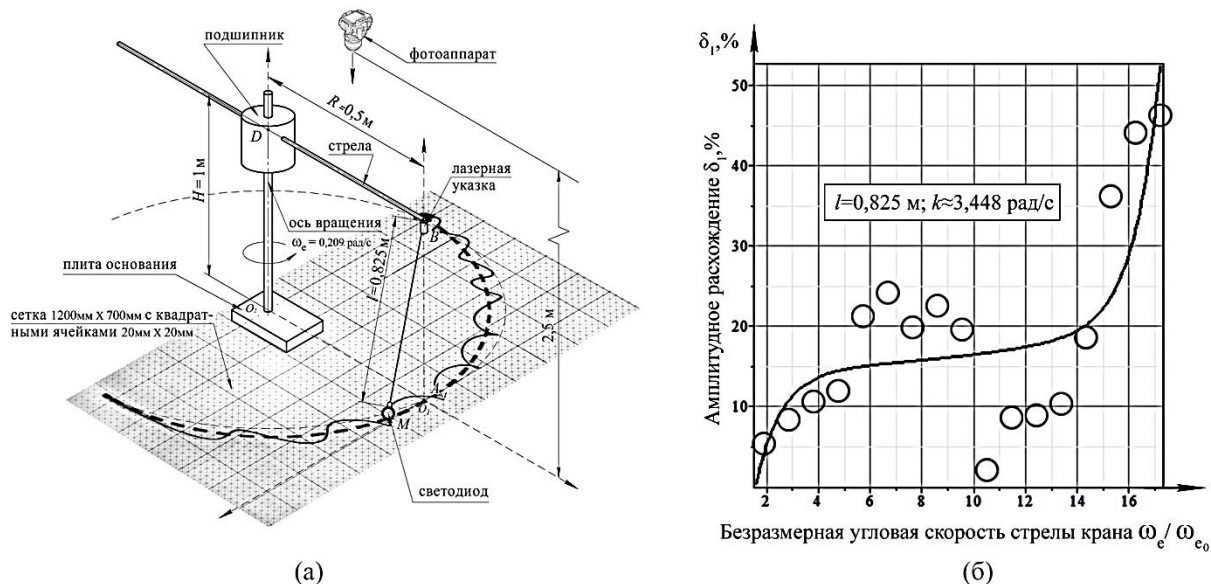


Рис. 3. а – экспериментальная установка; б – расчетные точки (○○○○) и регрессионная кривая (—) расхождения  $\delta_1$  относительных амплитуд для линеаризованной и нелинейной моделей при длине троса  $l = 0,825$  м

Установка на рис. 3, а включает следующие детали: вертикальный фиксированный стержень  $O_2D$  высотой  $H = 1$  м, подшипник  $D$ , модель  $BD$  стрелы радиусом  $R = 0,5$  м и диаметром 6 мм, лазерная указка  $B$ , светодиод (груз  $M$ ) диаметром 2 мм и с батарейкой с напряжением 3 В, трос  $BM$  с различными фиксированными длинами  $l_1 = 0,825$  м (на рис. 3, а и рис. 4, г),  $l_2 = 0,618$  м (на рис. 4, в),  $l_3 = 0,412$  м (на рис. 4, б),  $l_4 = 0,206$  м (на рис. 4, а), горизонтальная (в плоскости  $O_2x_2y_2$ ) сетка с размером полотна  $1200 \times 700$  мм и размерами квадратных делительных ячеек  $20 \times 20$  мм, верхний цифровой фотоаппарат, находящийся над уровнем горизонтальной сетки на высоте 2,5 м с выбранным длительным временем выдержки 60–90 с. Экспериментальные абсолютные траектории (— — — — —,  $y_2 = y_2(x_2)$ ) расхождения груза были записаны в ИСО  $E$  и приведены на рис. 3, а и рис. 4.

Сопоставление теоретических (— — — — —,  $y_2 = y_2(x_2)$ ) и экспериментальных (— — — — —,  $y_2 = y_2(x_2)$ ) результатов основывалось на вычислении амплитудных расхождений  $\delta$  на рис. 4 и показало, что  $\delta = 7,53$  % для  $l = 0,206$  м на рис. 4, а;  $\delta = 7,58$  % для  $l = 0,412$  м на рис. 4, б;  $\delta = 7,40$  % для  $l = 0,618$  м на рис. 4, в и  $\delta = 6,9$  % для  $l = 0,825$  м на рис. 4, г. Для оценки доверительных интервалов на рис. 4 были введены безразмерные соотношения  $r_{\text{теор}}/r_{\text{эксп}}$ , где  $r_{\text{теор}}$  и  $r_{\text{эксп}}$  – модули радиус-векторов, соединяющих т.  $O_2$  с теоретической (— — — — —) и экспериментальной (— — — — —) кривыми соответственно, а значения  $r_{\text{теор}}$  и  $r_{\text{эксп}}$  были рассчитаны для одного и того же фиксированного значения полярного угла  $\varphi_c$ . На основании  $t$ -критерия Стьюдента установлено, что для доверительной вероятности 0,95 значения доверительных интервалов составляют:  $0,9374 \leq (r_{\text{теор}}/r_{\text{эксп}}) \leq 1,0315$  for  $l = 0,206$  м на рис. 4, а;  $0,9014 \leq (r_{\text{теор}}/r_{\text{эксп}}) \leq 1,0272$  для  $l = 0,412$  м на рис. 4, б;  $0,9200 \leq (r_{\text{теор}}/r_{\text{эксп}}) \leq 1,0352$  для  $l = 0,618$  м на рис. 4, в;  $0,9257 \leq (r_{\text{теор}}/r_{\text{эксп}}) \leq 1,0066$  для  $l = 0,825$  м на рис. 4, г.

Для сопоставления линеаризованной (3)–(4), рис. 2 (а, в) и нелинейной модели (2), рис. 2 (б, г) было введено безразмерное амплитудное расхождение  $\delta_1$  (рис. 3, б) результатов между усредненными радиусами  $r_{\text{нелин}}$  на рис. 2, (б, г) и  $r_{\text{лин}}$  на рис. 2 (а, в).

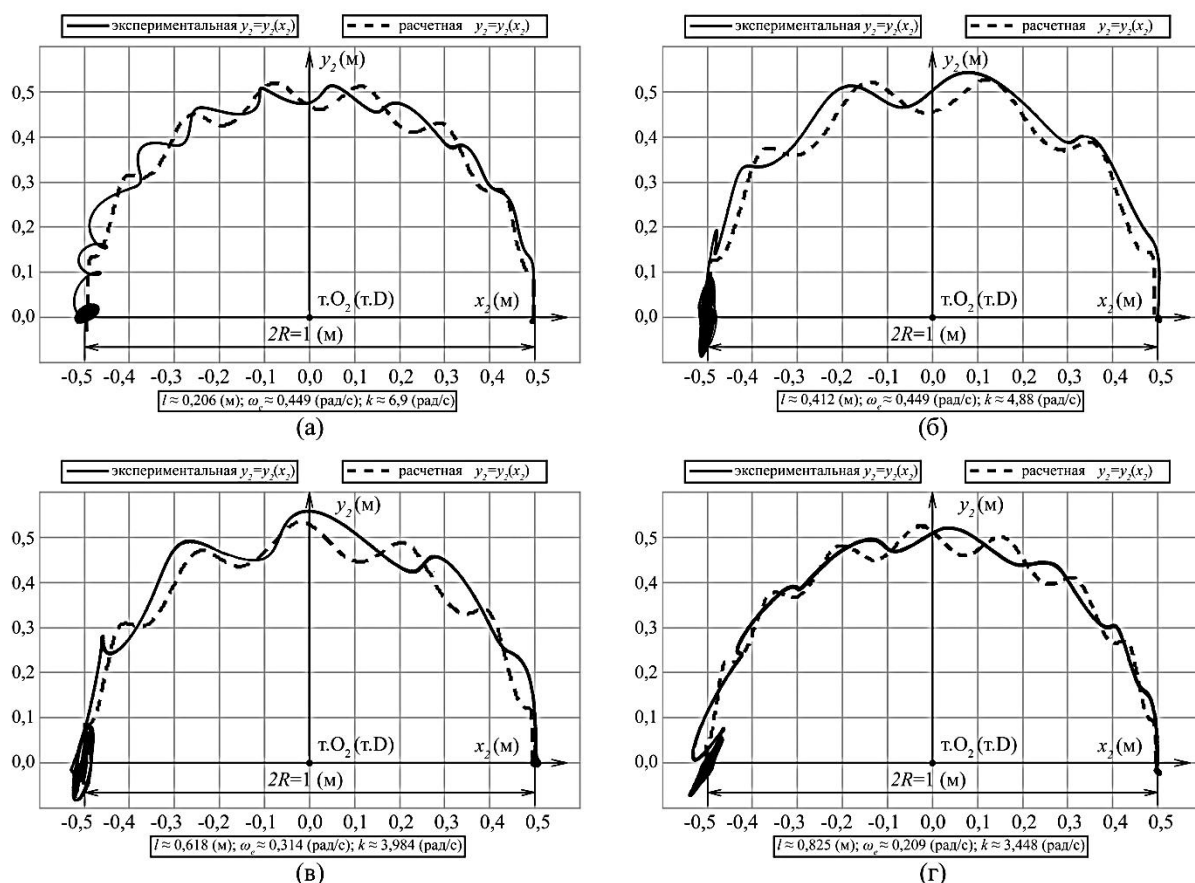


Рис. 4. Сравнение (-----) теоретических и (————) экспериментальных абсолютных траекторий груза для фиксированных длин троса:  
 а –  $l = 0,206$  м; б –  $l = 0,412$  м; в –  $l = 0,618$  м; г –  $l = 0,825$  м

Вид относительных траекторий на рис. 2 показывает, что как усредненные радиусы  $r_{\text{лин}}$  и  $r_{\text{нелин}}$ , так и амплитуды относительных траекторий возрастают с увеличением безразмерной угловой скорости стрелы  $\omega_e/\omega_{e0}$ , где  $\omega_{e0} \approx 0,209$  рад/с – это экспериментально выбранная рациональная угловая скорость модели стрелы крана. Как показано на рис. 2, имеет место устойчивая тенденция  $r_{\text{лин}} > r_{\text{нелин}}$ . Расчетные графики на рис. 2 и на рис. 3, б показывают, что безразмерное амплитудное расхождение  $\delta_1$  между линеаризованной и нелинейной моделями возрастает с увеличением безразмерной угловой скорости  $\omega_e/\omega_{e0}$  стрелы крана. На рис. 3, б показано, что  $\delta_1 < 11\%$  для  $\omega_e < 0,8$  рад/с, т. е. для  $\omega_e < 3,828\omega_{e0}$ . Из рис. 3, б следует, что  $\delta_1 < 11\%$  для  $\alpha_1 < 0,145$  рад. Т. о. на основании численных результатов, представленных на рис. 2 и на рис. 3, б было установлено, что линеаризованная модель (3)–(4) адекватно описывает нелинейную задачу (2) о раскачивании груза при равномерном вращении стрелы крана при  $\omega_e < 0,8$  рад/с и  $\alpha_1 < 0,145$  рад.

## ВЫВОДЫ

С применением относительных сферических координат получена нелинейная система дифференциальных уравнений для малых колебаний сферического маятника с тремя степенями свободы в случае постоянной угловой скорости переносного вращения стрелы крана. Идентичные линеаризованные уравнения в декартовых координатах получены с применением принципа Даламбера в предположении равномерности вращения стрелы и малости угла раскачивания груза  $\alpha_1$ . Как линеаризованная, так и нелинейная теоретические задачи об относительном раскачивании груза при равномерном вращении стрелы крана были сформулированы в виде соответствующих задач Коши.

Было получено аналитическое решение, амплитуды и собственные частоты для линеаризованной системы. В рамках экспериментальных исследований было выполнено сравнение экспериментально записанных абсолютных траекторий груза с расчетными абсолютными траекториями, полученными для линеаризованной модели раскачивания груза.

Были рассчитаны величины амплитудных расхождений между теоретическими и экспериментальными кривыми и был выявлен рост амплитудных расхождений с уменьшением длины нити, что связано с повышением частоты колебаний груза на тросе.

Было установлено удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных кинематических результатов. С привлечением нелинейных уравнений были определены значения кинематических и геометрических параметров механической системы «стрела крана – груз», при которых допустимо использование линеаризованной модели.

Полученная методика рекомендуется для решения прикладных задач подъемно-транспортного машиностроения на этапах проектирования тросовых систем стреловых кранов для различных режимов разгона и торможения стрелы, а также для изменяемой геометрии стреловой крановой системы с учетом переменности длины троса и телескопичности стрелы крана.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abdel-Rahman E. M. *Dynamics and Control of Cranes: A Review* / E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, Z. N. Masoud // *Journal of Vibration and Control*. – 2003. – Vol. 9. – N 7. – P. 863–908.
2. Blajer W. *Dynamics and control of rotary cranes executing a load prescribed motion* / W. Blajer, K. Kołodziejczyk // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. – 2006. – Vol. 44. – N 4. – P. 929–948.
3. Jerman B. *The Comparison of the Accuracy of two Mathematical Models, concerning Dynamics of the Slew-ing Cranes* // *FME Transactions*. – 2006. – Vol. 34. – P. 185–192.
4. Ju F. *Dynamic response of tower crane induced by the pendulum motion of the payload* / F. Ju, Y. S. Choo, F. S. Cui // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – N 2. – P. 376–389.
5. Maczynski A. *Dynamics of a mobile crane and optimisation of the slewing motion of its upper structure* / A. Maczynski, S. Wojciech // *Nonlinear Dynamics*. – 2003. – Vol. 32. – P. 259–290.
6. Mitrev R. *Dynamic behaviour of a spherical pendulum with spatially moving pivot* / R. Mitrev, B. Grigorov // *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Budowa Maszyn i Zarządzanie Produkcją*. – 2008. – Vol. 9. – P. 81–91.
7. Sakawa Y. *Optimal control of a rotary crane* / Y. Sakawa, Y. Shindo, Y. Hashimoto // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 1981. – Vol. 35. – N 4. – P. 535–557.
8. Кузьмин А. Н. *Исследование колебаний груза на гибком подвесе при повороте крана* / А. Н. Кузьмин, В. В. Суглобов, В. И. Федун // *Захист металургійних машин від поломок : зб. наук. пр. – Маріуполь : ПДТУ, 2011. – Вип. 13. – С. 141–147.*
9. Ловейкін В. С. *Нелінійні маятникові коливання вантажу на гнучкому підвісі при різних режимах обертання* / В. С. Ловейкін, А. А. Бойко, Ю. В. Човнюк // *Вісник ТНТУ (машинобудування, автоматизація виробництва та процеси механічної обробки)*. – 2010. – Т. 15. – № 3. – С. 41–48.
10. Периг А. В. *Численное математическое моделирование раскачивания поднимающегося груза при повороте стрелового крана* / А. В. Периг, Е. А. Бондаренко // *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2012. – № 2 (27). – С. 158–163.*
11. Периг А. В. *О динамических режимах работы стрелового крана при постоянном угле вылета стрелы* / А. В. Периг, А. Н. Стадник, И. А. Матвеев // *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2011. – № 4 (25). – С. 234–239.*
12. Периг О. В. *Горизонтальні коливання вантажу на тросі при рівномірному повороті стріли крану* / О. В. Периг, О. М. Стадник, О. І. Дериглазов // *Механіка та машинобудування : науково-технічний журнал. – Харків : НТУ «ХПИ», 2012. – № 1. – С. 33–40. – Бібліогр. : с. 39–40. – ISSN 2078-7766.*
13. *Сферические колебания груза на стальном канате при равномерном вращении стрелы крана* / А. В. Периг, А. Н. Стадник, А. И. Дериглазов, С. В. Подлесный // *Строительные и дорожные машины : ежемес- сячный научно-технический и производственный журнал. – Москва : ООО «СДМ-Пресс», 2013. – № 6. – С. 35-40. – Бібліогр. : с. 40. – ISSN 0039-2391.*
14. Стадник А. Н. *Применение относительных декартовых координат для сложного движения сфери- ческого маятника* / А. Н. Стадник, А. В. Периг, А. И. Дериглазов // *Вісник СевНТУ : збірник наукових праць. – Севастополь : Вид-во СевНТУ, 2013. – Вип. 137. – (Серія «Механіка, енергетика, екологія»). – С. 24–31. – Біблі- огр. : с. 30–31.*